*Bài toán nội suy*

*và đa thức nội suy Lagrange*

# Phần I: CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1. ***Bài toán nội suy đa thức:***  
   *1.1. Phát biểu bài toán:*

Cho hàm số trên   
Bằng cách nào đó thu được bộ *n+1* các điểm:   
Tìm đa thức sao cho:

* : đa thức nội suy
* : mốc nội suy
* , : điểm nội suy – Giá trị tương ứng: Giá trị nội suy
* : điểm ngoại suy – Giá trị tương ứng: Giá trị ngoại suy
* : Sai số của phép nội suy tại điểm

**1.2. Định lí về sự duy nhất của đa thức nội suy:**

*Định lý:* Đa thức thỏa mãn điều kiện bài toán nêu trên (nếu tồn tại) là duy nhất.  
*Chứng minh:*

* Giả sử từ bộ n điểm sinh ra được 2 đa thức nội suy và   
  Hiển nhiên ta có: với (\*)
* Xét hiệu thì hiển nhiên là đa thức bậc n (\*\*)
* Mà (Theo (\*))  
  Như vậy: có n+1 nghiệm là (\*\*\*)
* Từ (\*\*), (\*\*\*) ta thấy: hay   
  Định lý được chứng minh.

1. ***Đa thức nội suy Lagrange:***
   1. *Triển khai ý tưởng:*

Viết tường minh dạng của đa thức nội suy cần tìm có bậc là n là:

Từ điều kiện bài toán, hiển nhiên ta có *n+1* đẳng thức sau:

Với

Với

Với

.

.

.

Với

Rất tự nhiên, việc tìm đa thức nội suy trở thành việc giải hệ phương trình *(n+1)* ẩn với *(n+1)* phương trình.

Ẩn số cần tìm là bộ hệ số *(Chú ý: Khi này các đã là số xác định)*

Viết lại thành hệ phương trình:

Viết thành dạng ma trận:

***Ý tưởng: Đơn giản nhất: Chọn X là ma trận đơn vị => Vấn đề: Thành lập sao cho X là ma trận đơn vị?***

* 1. *Đa thức nội suy Lagrange:*

Để có X là ma trận đơn vị => Cần thành lập sao cho hang chéo = 1 còn các giá trị khác đều bằng không.  
Lập các đa thức cơ sở bậc *n* là thỏa mãn:

*Đánh chỉ số j cho đỡ nhầm lẫn với chỉ số i của điểm nội suy*

***??? Có phải cần tìm một đa thức CƠ SỞ dạng Lj(x) thỏa mãn***

* ***Tính chất như trên***
* ***Có bậc n?***

***… Thì sẽ thành lập được đa thức nội suy thỏa mãn yêu cầu bài toán ?***

Thử lại:

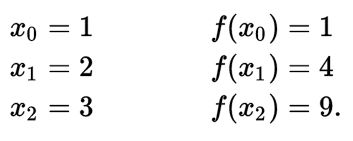
* Rõ ràng có bậc n.  
  *+ Để ý thì mẫu: Là các số xác định  
  + Tử: Có n số hạng có x => Đa thức của x bậc n*
* Và dễ dàng nhận thấy: =1;   
  Từ đó ta thành lập đa thức nội suy Lagrange:

Kiểm tra lại xem đa thức Lagrange này có thỏa mãn yêu cầu bài toán không:

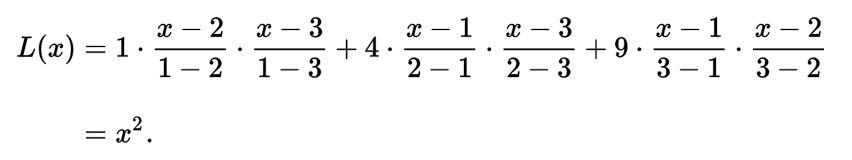
* Bậc của hiển nhiên là n: Do là tổng của các

Vậy đa thức nội suy Lagrange được xây dựng như trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

*Ví dụ:*  Cho 3 điểm nội suy như sau:



Ta sẽ có đa thức nội suy Lagrange tương ứng là:



*Sai số:*  
Để tiện cho đánh giá sai số, đặt một số kí hiệu như sau:  
  
*[Xem lại đoạn này]??*thì:   
=>



= 

= 

= 

=>= 

=   
??từ đó:   
  
**CHÚ Ý**: chính là mẫu số của   
  
Từ đó viết lại công thức *đa thức nội suy Lagrange:*  
  
Hay:   
[Bắt đầu đánh giá sai số]  
Công thức sai số tại điểm *(cố định)* :  
  
Để đánh giá sai số, ta đặt (\*)  
(Chọn )  
Mà ta có: (\*\*)  
(\*),(\*\*) suy ra: PT: có nghiệm (cụ thể là: )  
*?? Phát biểu ĐL Rolle ở trước đó?*Theo *định lý Rolle*:  
  
Tương tự:  
  
Giả sử nghiệm của là , cũng *[??theo đl Roll]* suy ra: và  
  
(Chú ý rằng Rn còn có Pn nhưng bậc n nên đạo hàm cấp n+1 thành 0 rồi)  
Còn wn thì nghiên cứu xem tại sao đạo hàm cấp n+1 lại thành (n+1)! nhé)  
Từ đó suy ra:   
Mà nhìn lại:  
  
Gọi , công thức trên trở thành:  
  
Đây chính là công thức đánh giá sai số của *đa thức nội suy Lagrange* tại điểm   
*Ví dụ:* Đánh giá sai số của *đa thức nội suy Lagrange   
[Ví dụ trong Giáo trình??]*

* 1. *Tiểu kết:*  
     - Bài toán: Cho n+1 điểm: , tìm đa thức sao cho:   
     - Đa thức nội suy Lagrange:  
     - Công thức sai số:

# Phần II: THỰC NGHIỆM TRÊN MATLAB

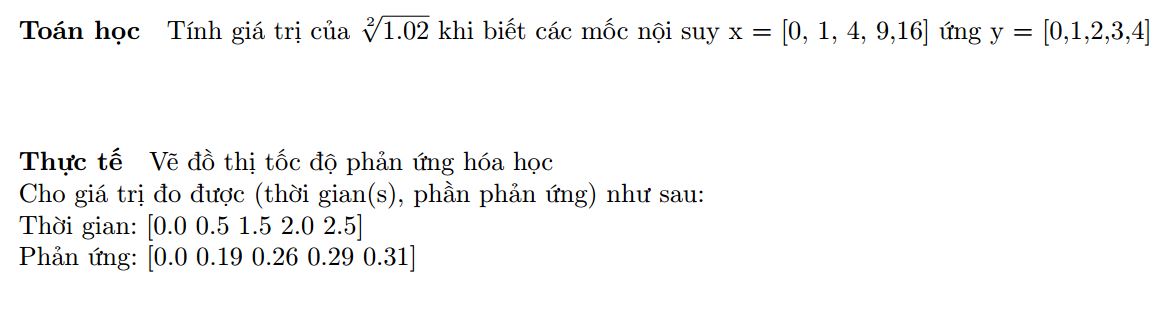
1. ***Chương trình:***

|  |  |
| --- | --- |
| Input | * Vector x,y: các mốc nội suy (x,y cùng độ dài) * Vector u: điểm nội suy |
| Output | * Vector v: giá trị nội suy tại u |

*Thuật toán: [Giáo trình Matlab]*

1. ***Chạy thử một số ví dụ:***  
   *Ví dụ 1*: (Giáo trình phương pháp tình và Matlab)  
   Tìm đa thức nội suy Lagrange

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* |
|  | *1* | *2* | *3* | *4* | *7* |
|  | *17* | *17.5* | *76* | *210.5* | *1970* |

*Ví dụ 2,3:*  


1. Một số nhận xét:

* Ưu điểm:
* Dễ tính toán (Độ phức tạp thuật toán: (Có 2 vòng lặp for lồng nhau))
* Blah blah
* Nhược điểm:
* Thêm mốc nội suy thì phải tính lại từ đầu
* Blah blah

# Phụ lục: CHỌN MỐC NỘI SUY TỐI ƯU *//Còn phải làm - Số lượng mốc nội suy? (CÀNG GẦN TÂM THÌ GIÁ TRỊ NỘI SUY CÀNG ĐÚNG)*

1. ***Ví dụ:***  
   Xem xét hàm   
   Quan sát sự thay đổi của đa thức nội suy Lagrange khi thay đổi vị trí các mốc nội suy:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Trường hợp | 1 | 2 | 3 |
|  | [-1 0 1] | [-1 -0.5 0] | [0 0.25 0.5] |
|  | [0.038 1 0.038] | [0.038 0.138 1] | [1 0.390 0.138] |

Nhận xét: Với điểm nội suy là ta có bảng sai số tương ứng các trường hợp như sau:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |
|  | 0.2 | 0.2 | 0.2 |
|  | 0.846 | 2.238 | 0.196 |
|  | -0.646 | -2.038 | 0.0004 |

*[?]* Vậy trên đoạn *[a,b],* nếu *cố định* số lượng các *mốc nội suy* thì *vị trí* các điểm nội suy ở đâu để sai số là nhỏ nhất?

1. ***Bài toán mốc nội suy tối ưu:***  
   *[?]* Vậy trên đoạn *[a,b],* nếu *cố định* số lượng các *mốc nội suy* thì *vị trí* các điểm nội suy ở đâu để sai số là nhỏ nhất?  
   Để giải quyết bài toán nêu trên, trước hết, ta nhìn lại công thức sai số:  
     
   Nhận thấy rằng:

* xác định
* xác định

Vậy sai số chỉ phụ thuộc vào   
Yêu cầu bài toán trở thành:  
Trên đoạn , chọn các mốc nội suy sao cho đạt giá trị nhỏ nhất  
Hay tìm:

Để giải quyết bài toán này, ta sẽ sử dụng đa thức Chebyshev.

1. ***Đa thức Chebyshev:***  
   Xét *đa thức Chebyshev*:   
   Có thể tìm ra được các chú ý sau: (Xem trong *Giáo trình Giải tích số*)

* Nghiệm của là
* Đạt giá trị lớn nhất: tại các điểm

## *Định lý: Trong tất cả các đa thức bậc n, có hệ số của bằng “1” thì đa thức Chebyshev có độ lệch so với số “0” là nhỏ nhất trên đoạn . Nghĩa là: Nếu ta có: thì:*

## *Chứng minh: [Phản chứng]*

*Giả sử tìm được đa thức*

*mà thì vô lí.*

*Thật vậy: Đặt thì: Bậc của không quá*

*Tại các điểm*

*Lại do: nên: luân phiên đổi dấu qua  
Nghĩa là: có ít nhất n nghiệm (vô lí)  
Vậy: (đpcm)*

Từ định lý trên, ta suy ra: Xét trên đoạn [-1,1], nếu ta chọn các mốc nội suy là *nghiệm* của *đa thức Chebyshev* thì *đa thức nội suy Lagrange* sẽ đạt sai số nhỏ nhất.  
Cụ thể:

* Mốc nội suy là:
* Sai số lúc này là:

Trong trường hợp bất kì, ta thực hiện phép đổi biến đưa về đoạn   
Đặt thì   
Nghiệm của đa thức Chebyshev:

Khi đó thì:   
?? Khi cần nội suy đa thức bậc n thì cần n-1 điểm nội suy  
  
Ví dụ: [Thực nghiệm trên Matlab luôn]  
[So sánh khi chọn mốc nội suy – Mốc nội suy bất kì]  
Quay lại ví dụ trước:  
Xem xét hàm   
Áp dụng công thức, tìm ra 3 mốc nội suy tối ưu

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Trường hợp | 1 | 2 | 3 | Tối ưu |
|  | [-1 0 1] | [-1 -0.5 0] | [0 0.25 0.5] | [0.866 0 -0.866] |
|  | [0.038 1 0.038] | [0.038 0.138 1] | [1 0.390 0.138] | [0.051 1 0.051] |

Nhận xét: Với điểm nội suy là ta có bảng sai số tương ứng các trường hợp như sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | Tối ưu |
|  | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 |
|  | 0.846 | 2.238 | 0.196 | 0.975 |
|  | -0.646 | -2.038 | 0.0004 | -0.775 |